MATHÉMATIQUES

(Option générale)

DURÉE : 2 heures

Est autorisé : l'usage d'une seule calculatrice de poche y compris programmable, alphanumérique ou à écran graphique, à condition que son fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit pas fait l'usage d'une imprimante.

Note importante : les réponses non justifiées (par une démonstration ou un résultat précis du cours) ne seront pas prises en compte.

La qualité de la rédaction (présentation, orthographe, rigueur) entrera pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Tournez la page S.V.P.

Partie A

Une population d'animaux est atteinte par un virus. On constate que les animaux mâles sont atteints dans la proportion de 2,5 % et les animaux femelles dans la proportion de 1,6 %. Par ailleurs, on a évalué la proportion de mâles à 45 %.
Calculer la probabilité qu'un animal pris au hasard dans cette population soit atteint par le virus.

Pour toute la suite du problème, la probabilité qu'un animal soit atteint par le virus sera arrondie à 0,02.

Partie B

On dispose d'un test permettant d'établir de façon certaine qu'un échantillon de sang contient ou non le virus, le résultat de ce test étant dit positif dans le premier cas et négatif dans le second.
Un laboratoire doit analyser 200 prélèvements sanguins effectués de manière aléatoire sur cette population, dans des conditions indépendantes.
Tous les prélèvements sanguins sont testés un à un, et on appelle X le nombre de tests positifs sur les 200 tests effectués.

1) Donner la loi de X. En déduire son espérance et sa variance.

2) a) Montrer que l'on peut approcher la loi de X par une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.

b) A l'aide de cette approximation, calculer $P(X \leq 2)$, $P(X \geq 2 / X \leq 4)$ puis $P(|X-4| \leq 2)$

c) Quelle est la probabilité qu'au moins un test soit positif, sur l'ensemble des tests effectués ?

3) Quel minorant de $P(|X-4| \leq 2)$ obtient-on en appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev ?

Partie C

Pour des raisons d'économie, on cherche à diminuer le nombre de tests à effectuer.
Pour cela, on répartit les 200 prélèvements en 10 lots, chaque lot contenant 20 de ces prélèvements.
Dans chacun des lots, on extrait une petite quantité de sang des 20 prélèvements qui composent ce lot, on mélange ces extraits et on teste le mélange obtenu.
Si le test sur le mélange est négatif, une seule analyse permet de conclure qu'aucun des animaux correspondants n'est atteint par le virus.
Si le test est positif, on analyse séparément les 20 prélèvements constituant le lot.

On se propose d'évaluer le nombre moyen de tests effectués en utilisant cette méthode.
Soit Z le nombre de lots testés positifs, et T le nombre total de tests effectués.

1) Montrer que $T = 10 + 20Z$.

2) On considère un lot donné. Calculer la probabilité que le test sur le mélange des 20 prélèvements de ce lot soit **négatif** .
En déduire la probabilité que le test sur le mélange de ce lot soit positif.

3) Montrer que Z suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
En déduire l'espérance $E(Z)$ de Z.

4) Calculer $E(T)$.
On suppose que le coût est proportionnel au nombre de tests effectués. Si au lieu de tester les 200 prélèvements un à un on adopte cette méthode, quel pourcentage d'économie réalise-t-on en moyenne ?

Partie D

1) Soit g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = x^2 \times (0{,}98)^x + \dfrac{1}{\ln(0{,}98)}$.

(On rappelle que $(0{,}98)^x = e^{x \ln 0.98}$.)

a) Etudier les variations de g sur $[0, +\infty[$.

b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions α et β ($\alpha < \beta$) dans $[0, +\infty[$. Vérifier que l'on a : $7 < \alpha < 8$.

c) Préciser le signe de $g(x)$ pour $x \in [0, +\infty[$

2) On pose $f(x) = \dfrac{1}{x} - (0{,}98)^x$, pour $x \in]0, +\infty[$.

a) Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ et $g(x)$ sont de même signe.

b) En déduire les variations de f sur $]0, +\infty[$.

c) Montrer que f admet un minimum absolu en α.

Partie E

Dans cette partie, on essaie d'optimiser la méthode décrite dans la Partie C.
Soit n un entier naturel diviseur de 200. On répartit les 200 prélèvements en lots de n prélèvements chacun. On désigne encore par Z le nombre de lots testés positifs et par T le nombre total de tests effectués.

1) a) Exprimer T en fonction de Z et de n.

b) Montrer que $E(T) = 200 \times (1 + f(n))$.

2) Déterminer n pour lequel $E(T)$ est minimale.
Quel est alors le nombre moyen de tests effectués ?